Normalverteilte Zufallsvariable:

Bei den meisten Zufallsvariablen $x = f(u_1,\ldots,u_k; v_1, \ldots)$, die von sehr vielen unkontrollierten Einflussgrößen v_1, $v_2,\ldots$ abhängen oder bei denen die unkontrollierten Einflussgrößen v_i alle nur einen schwachen Einfluss auf x haben, zeigen die Dichtefunktionen p zu allen Experimenten einen eingipfligen, glockenförmigen Graphen mit einer senkrechten Symmetrieachse bei $x = \mu$ = Erwartungswert zum jeweiligen Experiment.
Weiter gilt: Ist σ die Standardabweichung der Messmethode, so liegen alle nur denkbaren Messergebnisse zum Experiment

mit 68,26% Wahrscheinlichkeit im Intervall mit Mittelpunkt μ und Länge 2σ,
mit 95,44% Wahrscheinlichkeit im Intervall mit Mittelpunkt μ und Länge 4σ und
mit 99,74% Wahrscheinlichkeit im Intervall mit Mittelpunkt μ und Länge 6σ.

Solche Zufallsvariable heißen **normalverteilt.**

Für Messreihen zu normalverteiltem x kennt die Statistik die leistungsstärksten Auswertungsverfahren. Aus diesem Grund ist man oft interessiert, mit möglichst geringem Arbeitsaufwand zu testen, ob bei einer gegebenen Messreihe zu einer Variablen x wohl Normalverteilung vorliegt.

Idee: Da die empirische Standardabweichung $s = \sqrt{\frac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{n-1}}$ ein Näherungswert für σ ist, ergibt sich für Messreihen mit n Messwerten und empiriscche Standardabweichung s folgendes Kriterium: Die **Spannweite R** = $x_{max} - x_{min}$ aller Messwerte der Messreihe sollte die Größe 4s bei kurzen und 6s bei langen Messreihen weder zu stark unter- noch zu stark überschreiten. Darauf basiert der folgende

Schnelltest auf Normalverteilung nach David:

Gegeben sei eine Messreihe mit n Messungen und der empirischen Standardabweichung $s = \sqrt{\frac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{n-1}}$. Die sogenannte **Nullhypothese** H_0 lautet:

H_0 = „Anhand der vorliegenden Messreihe ist keine Abweichung von der Normalverteilung feststellbar."

1. Schritt: Berechne die **Spannweite R =** $x_{max} - x_{min}$ = größter gemessener minus kleinster gemessener Wert

2. Schritt: Berechne das Größenverhältnis

$$G = \frac{\text{Spannweite}}{\text{Standardabweichung s}} = \frac{R}{s}$$

3. Schritt: Schlage für das gegebene n die unteren Schranken G_u und oberen Schranken G_o in der David-Test-Tabelle nach (siehe nächste Seite).

Auswertung:

- Gilt mit **90%** Sicherheit **sowohl** $G_u \le G$ **als auch** $G \le G_o$, so ist die Nullhypothese, dass x normalverteilt ist, „anzunehmen", denn <u>weniger als 90% Wahrscheinlichkeit spricht gegen Normalverteilung, und für eine Ablehnung der H_0 ist das zu wenig. Wie viel Wahrscheinlichkeit genau **für** die Richtigkeit der H_0 spricht, bleibt aber unbekannt.</u>

- Gilt mit **90%** Sicherheit mindestens eine der Bedingungen $G < G_u$ **oder** $G > G_o$ und handelt es sich um eine längere Messreihe, so darf man immer noch annehmen, dass x normalverteilt ist. Im Fall einer kleineren Messreihe sollte die Nullhypothese H_0 hingegen jetzt besser abgelehnt werden. Nur noch 10% Wahrscheinlichkeit spricht jetzt für die Normalverteilung von x, 90% dagegen.

- Gilt mit **95%** Sicherheit mindestens eine der Bedingungen $G < G_u$ **oder** $G > G_o$, so ist die Nullhypothese „**wahrscheinlich**" falsch. Sie wird dann mit 95% Sicherheit (= mit 5% „Irrtumswahrscheinlichkeit") abgelehnt. Nur noch 5% Wahrscheinlichkeit spricht für die Normalverteilung von x.

- Gilt mit **99%** Sicherheit mindestens eine der Bedingungen $G < G_u$ **oder** $G > G_o$, so ist die Nullhypothese **„signifikant"** falsch. Sie wird dann mit 99% Sicherheit (= mit 1% „Irrtumswahrscheinlichkeit") abgelehnt. Nur noch 1% Wahrscheinlichkeit spricht für dieNormalverteilung von x.

- Gilt mit **99,9%** Sicherheit mindestens eine der Bedingungen $G < G_u$ **oder** $G > G_o$, so ist die Nullhypothese „**hochsignifikant**" falsch. Sie wird dann mit 99,9% Sicherheit (= mit 0,1% „Irrtumswahrscheinlichkeit") abgelehnt. Nur noch 0,1% Wahrscheinlichkeit spricht für dieNormalverteilung von x.

Warnung: 100% Sicherheit liefert ein Testergebnis nie!

Tabelle für den Schnelltest nach David auf Normalverteilung:

	untere Schranke G_u mit Sicherheit				obere Schranke G_o mit Sicherheit			
n	99,9%	99%	95%	**90%**	**90%**	95%	99%	99,9%
3	1,732	1,737	1,758	**1,782**	**1,997**	1,999	2,000	2,000
4	1,732	1,87	1,98	**2,04**	**2,409**	2,429	2,445	2,449
5	1,826	2,02	2,15	**2,22**	**2,712**	2,753	2,803	2,828
6	1,826	2,15	2,28	**2,37**	**2,949**	3,012	3,095	3,162
7	1,871	2,26	2,40	**2,49**	**3,143**	3,222	3,338	3,464
8	1,871	2,35	2,50	**2,59**	**3,308**	3,399	3,543	3,742
9	1,897	2,44	2,59	**2,68**	**3,449**	3,552	3,720	4,000
10	1,897	2,51	2,67	**2,76**	**3,57**	3,685	3,875	4,243
11	1,915	2,58	2,47	**2,48**	**3,68**	3,80	4,012	4,472
12	1,915	2,64	2,80	**2,90**	**3,78**	3,91	4,134	4,690
13	1,927	2,70	2,86	**2,96**	**3,87**	4,00	4,244	4,899
14	1,972	2,75	2,92	**3,02**	**3,95**	4,09	4,34	5,099
15	1,936	2,80	2,97	**3,07**	**4,02**	4,17	4,44	5,292
16	1,936	2,84	3,01	**3,12**	**4,09**	4,24	4,52	5,477
17	1,944	2,88	3,06	**3,17**	**4,15**	4,31	4,60	5,657
18	1,944	2,92	3,10	**3,21**	**4,21**	4,37	4,67	5,831
19	1,949	2,96	3,14	**3,25**	**4,27**	4,43	4,74	6,000
20	1,949	2,99	3,18	**3,29**	**4,32**	4,49	4,80	6,164
25	1,961	3,15	3,34	**3,45**	**4,53**	4,71	5,06	6,93
30	1,966	3,27	3,47	**3,59**	**4,70**	4,89	5,26	7,62
35	1,972	3,38	3,58	**3,70**	**4,84**	5,04	5,42	8,25
40	1,975	3,47	3,67	**3,79**	**4,96**	5,16	5,56	8,83
45	1,978	3,55	3,75	**3,88**	**5,06**	5,26	5,67	9,38
50	1,980	3,62	3,83	**3,95**	**5,14**	5,35	5,77	9,90
60	1,983	3,75	3,96	**4,08**	**5,29**	5,51	5,94	10,86
70	1,986	3,85	4,06	**4,19**	**5,41**	5,63	6,07	11,75
80	1,987	3,94	4,16	**4,28**	**5,51**	5,73	6,18	12,57
90	1,989	4,02	4,24	**4,36**	**5,60**	5,82	6,27	13,34
100	1,990	4,10	4,31	**4,44**	**5,68**	5,90	6,36	14,07
150	1,993	4,38	4,59	**4,72**	**5,96**	6,18	6,64	17,26
200	1,995	4,59	4,78	**4,90**	**6,15**	6,39	6,84	19,95
500	1,998	5,13	5,37	**5,49**	**6,72**	6,94	7,42	31,59
1000	1,999	5,57	5,79	**5,92**	**7,11**	7,33	7,80	44,70
	99,9%	99%	95%	**90%**	**90%**	95%	99%	99,9%
	untere Schranke G_u mit Sicherheit				obere Schranke G_o mit Sicherheit			